

IN34A: OPTIMIZACIÓN

Auxiliar 6

Pregunta 1

$$\text{máx } z = 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 9 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolver utilizando simplex.

Solución:

Primero se debe llevar el problema planteado a la forma estándar (FE):

$$\text{mín } z = c^T \vec{x}$$

s.a.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$\text{mín } \bar{z} = -4 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este caso las variables asociadas a la base serán x_3 , x_4 y x_5 . Por lo tanto, la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, los valores de \vec{b} y A (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_1 y x_2) son:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\bar{A} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que $\bar{b} \geq 0$ el punto en el que nos encontramos parados es factible. Para verificar si es óptimo, se debe utilizar el criterio de optimalidad. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c}_R = c_R - c_B \bar{A}$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo.

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix} \leq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

ITERACIÓN 1:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -6 y corresponde a la variable x_2 , luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base se debe utilizar el siguiente criterio:

$$\min_{a_{i2} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \right\} = \left\{ \frac{9}{3}, \frac{0}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 0 \mapsto x_4 \text{ sale de la base.}$$

En este caso las variables asociadas a la base serán x_3 , x_2 y x_5 . Por lo tanto, la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, los valores de \bar{b} y \bar{A} (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_1 y x_4) son:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\bar{A} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dado que $\bar{b} \geq 0$ el punto en el que nos encontramos parados es factible. Para verificar si es óptimo, se debe utilizar el criterio de optimalidad. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c}_R = c_R - c_B \bar{A}$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo.

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \end{pmatrix} \leq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

ITERACIÓN 2:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -10 y corresponde a la variable x_1 , luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base se debe utilizar el siguiente criterio:

$$\min_{a_{i1} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}}{a_{i1}} \right\} = \left\{ \frac{9}{5}, \frac{2}{1} \right\} = \left\{ \frac{9}{5} \right\} \mapsto x_3 \text{ sale de la base.}$$

En este caso las variables asociadas a la base serán x_1 , x_2 y x_5 . Por lo tanto, la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Además, los valores de \bar{b} y \bar{A} (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_3 y x_4) son:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\bar{A} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Dado que $\bar{b} \geq 0$ el punto en el que nos encontramos parados es factible. Para verificar si es óptimo, se debe utilizar el criterio de optimalidad. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c}_R = c_R - c_B \bar{A}$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo.

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar. Cabe destacar que uno de los componentes de los costos reducidos (c_R) es igual a 0, por lo tanto el problema presenta múltiples soluciones.

Los valores de las variables básicas en el óptimo se obtienen de \bar{b} . En este caso:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_5^* \end{pmatrix} \geq \vec{0} \mapsto z = 4 \cdot x_1^* + 6 \cdot x_2^* = 4 \cdot \frac{9}{5} + 6 \cdot \frac{9}{5} = 18$$

Pregunta 2

Sea el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolver utilizando simplex.

Solución:

Primero se debe llevar el problema planteado a la forma estándar (FE):

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= c^T \vec{x} \\ \text{s.a.} \quad & A\vec{x} = \vec{b} \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{mín } \bar{z} &= -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & -x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso las variables asociadas a la base serán x_3 y x_4 . Por lo tanto, la matriz B queda:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, los valores de \bar{b} y A (que tiene asociadas las columnas relacionadas a las variables no básicas, que en este caso son x_1 y x_2) son:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\bar{A} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que $\bar{b} \geq 0$ el punto en el que nos encontramos parados es factible. Para verificar si es óptimo, se debe utilizar el criterio de optimalidad. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como $\bar{c}_R = c_R - c_B \bar{A}$ y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo.

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \leq \vec{0}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

ITERACIÓN 1:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, ambos valores son iguales a -1, luego se puede escoger cualquiera de las variables para seguir iterando. Luego, se hará entrar a la base a la variable x_1 .

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base se debe utilizar el siguiente criterio:

$\min_{\bar{a}_{i1} > 0}$ = el resultado es vacío puesto que ningún valor de $\bar{a}_{i1} > 0 \mapsto$ No se puede seguir iterando.

Dudas, consultas o comentarios
mpulido@di.uchile.cl